Zadanie 1: Proszę udowodnić istnienie i wyznaczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} nx \cos^n x \, \mathrm{d}x.$$

Przykładowe rozwiązanie: W pierwszym semestrze Analizy Matematycznej udowodnione zostało, że dla każdego $x \in [0, \pi/2]$ spełnione są nierówności $\sin x \leq x \leq \mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, więc również $\sin x \cos^n x \leq x \cos^n x \leq \sin x \cos^{n-1} x$. Stąd

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+1} = n \cdot \frac{-\cos^{n+1} x}{n+1}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} &= n \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^n x \, \mathrm{d}x \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} nx \cos^n x \, \mathrm{d}x \\
&\leq n \lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^{n-1} x \, \mathrm{d}x = n \cdot \frac{-\cos^n x}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 1.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że szukana granica istnieje i jest równa 1.

Zadanie 4: Proszę wyznaczyć wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{1/n}}{n}$$

i rozstrzygnąć, czy jest ona liczbą wymierną.

Przykładowe rozwiązanie: Określmy ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wzorem

$$a_n = n^{-n} \cdot \prod_{k=1}^{n}(n+k) = \frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}.$$

Wówczas

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(2n+2)! \cdot n!}{(2n)! \cdot (n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} : \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$= 2 \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} : \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} 2 \cdot 2 : \mathrm{e} = 4/\mathrm{e}$$

– skorzystaliśmy z twierdzenia o granicy iloczynu i ilorazu ciągów zbieżnych z pierwszego semestru Analizy Matematycznej. Inny fakt[1] z pierwszego semestru zajęć Analizy Matematycznej mówi, że gdy dla ciągu liczb dodatnich $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ istnieje granica $g = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$, to również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Stosując ten fakt[2] do zdefiniowanego przez nas ciągu, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{1/n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 4/\mathrm{e}.$$

Gdyby granica ta była równa ułamkowi p/q dla pewnych liczb całkowitych $q \neq 0$ oraz p, to musiałoby być również $p \neq 0$ (wszak $4/\mathrm{e} \neq 0$) i liczbę e można by przedstawić w postaci ułamka $4q/p$, co przeczyłoby – udowodnionej na wykładzie – niewymierności liczby e. Stąd wynika, że granica $4/\mathrm{e}$ nie jest liczbą wymierną.

[1] Z twierdzenia Stolza wynika, że skoro $\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \to \ln(g)$, to $\ln(a_n)/n \to \ln(g)$. Pozostaje skorzystać z ciągłości logarytmu naturalnego na $(0,\infty)$ i funkcji wykładniczej na $\mathbb{R}$.

[2] Szukaną granicę można wyznaczyć również na wiele innych sposobów, np. używając wzoru Stirlinga.

Zadanie 5: Dla dodatniej liczby całkowitej n określamy funkcję $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}\cos^{2n+1} x.$$

Proszę udowodnić, że szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a następnie wyznaczyć promień zbieżności szeregu Taylora funkcji ψ względem punktu $\pi/3$ i zbiór wszystkich punktów prostej rzeczywistej, w których funkcja ψ równa jest sumie tego szeregu Taylora.

Przykładowe rozwiązanie: Dla $n = 1, 2, \ldots$ niech

$$a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)\cdot(2n)!!}, \quad b_n = \frac{n!\cdot \mathrm{e}^n}{n^n\cdot\sqrt{n}}.$$

Wzór Stirlinga mówi, że $\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2\pi}$, zatem

$$a_n = \frac{(2n-1)!!\cdot(2n)!!}{(2n+1)\cdot\big((2n)!!\big)^2} = \frac{(2n)!}{(2n+1)\cdot\big(2^n\cdot n!\big)^2} =$$

$$\frac{b_{2n}\cdot \mathrm{e}^{-2n}\cdot(2n)^{2n}\cdot\sqrt{2n}}{(2n+1)\cdot\big(2^n\cdot b_n\cdot \mathrm{e}^{-n}\cdot n^n\cdot\sqrt{n}\big)^2} = \frac{b_{2n}\cdot\sqrt{2}}{(2n+1)\sqrt{n}\cdot b_n^2},$$

skąd[3] wynika, że

$$\lim_{n\to\infty} n^{3/2} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}\cdot b_{2n}\cdot b_n^{-2}}{2+n^{-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2+n^{-1}}\cdot\lim_{n\to\infty} b_{2n}\cdot\big(\lim_{n\to\infty} b_n\big)^{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

więc $C = \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{3/2} a_n < \infty$, a stąd[4] $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le C\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} < \infty$. Ponieważ zaś $|f_n(x)| \le a_n$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i n naturalnych, to z kryterium majoryzacyjnego Weierstrassa wynika jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ na $\mathbb{R}$. Wszystkie wyrazy tego szeregu są funkcjami ciągłymi, więc udowodniona właśnie jego zbieżność jednostajna pozwala również wywnioskować, że jego suma ψ jest funkcją ciągłą na $\mathbb{R}$.

Zbadajmy szereg $s(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n+1}$. Skoro szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to rozważany szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie $z = 1$, więc jego promień zbieżności jest nie mniejszy niż 1. Stąd funkcja s jest różniczkowalna nieskończenie wiele razy na przedziale $(-1, 1)$ oraz

$$s'(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_n z^{2n}, \quad s''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1)a_n z^{2n-1}$$

dla $z \in (-1, 1)$.

[3] Oczywiście można to również wywnioskować ze wzoru Wallisa.

[4] Zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ można też udowodnić inaczej, np. używając kryterium Raabego.

Niech $\pi\mathbb{Z} = \{m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$. Ponieważ funkcja kosinus przyjmuje na zbiorze $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ wartości z przedziału $(-1, 1)$, to dla $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ mamy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big) = (-\sin t) \cdot s'(\cos t)$$

oraz

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\big(s(\cos t)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big)\Big) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sin t \cdot s'(\cos t)\big)$$

$$= \sin^2 t \cdot s''(\cos t) - \cos t \cdot s'(\cos t) = \big(1 - \cos^2 t\big) \cdot s''(\cos t) - \cos t \cdot s'(\cos t)$$

$$= \big(1 - \cos^2 t\big) \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1)a_n \cos^{2n-1} t\Big) - \cos t \cdot \Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_n \cos^{2n} t\Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1)a_n \cos^{2n-1} t - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1)a_n \cos^{2n+1} t$$

$$- \cos t - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_n \cos^{2n+1} t$$

$$= 6a_1 \cos t + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+2)(2n+3)a_{n+1} \cos^{2n+1} t - \sum_{n=1}^{\infty} 2n(2n+1)a_n \cos^{2n+1} t$$

$$- \cos t - \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)a_n \cos^{2n+1} t$$

$$= (6a_1 - 1) \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \big((2n+2)(2n+3)a_{n+1} - (2n+1)^2 a_n\big) \cos^{2n+1} t = 0,$$

gdyż $a_1 = 1/6$, a dla $n = 1, 2, \ldots$ mamy

$$(2n+2)(2n+3)a_{n+1} = (2n+2)(2n+3)\frac{(2n+1)!!}{(2n+3) \cdot (2n+2)!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}$$

$$= \frac{(2n+1) \cdot (2n-1)!!}{(2n)!!} = (2n+1)^2 \frac{(2n-1)!!}{(2n+1) \cdot (2n)!!} = (2n+1)^2 a_n.$$

W szczególności pochodna funkcji $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big)$ jest zerowa na przedziale $(0, \pi)$, więc funkcja $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big)$ jest stała na tym przedziale. Skoro jednak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big)\Big|_{t=\pi/2} = \Big(-\sin\frac{\pi}{2}\Big) \cdot s'\Big(\cos\frac{\pi}{2}\Big) = -s'(0) = -1,$$

to $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(s(\cos t)\big) \equiv -1$ na $(0, \pi)$, więc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t + s(\cos t)\big) \equiv 0$ na $(0, \pi)$, co oznacza, że funkcja $t \mapsto t + s(\cos t)$ jest stała na $(0, \pi)$. W punkcie $t = \pi/2$ funkcja $t + s(\cos t)$ przyjmuje wartość $\frac{\pi}{2} + s(0) = \frac{\pi}{2}$, zatem $s(\cos t) = \frac{\pi}{2} - t$ dla wszystkich $t \in (0, \pi)$, stąd zaś

$$\psi(t) = s(\cos t) - \cos t = \frac{\pi}{2} - t - \cos t$$

dla wszystkich $t \in (0, \pi)$.

Udowodniona równość pozwala obliczyć pochodne wszystkich rzędów funkcji ψ w punkcie $\pi/3$ i stwierdzić, że dla rzędów nie mniejszych niż 2 są one takie same, jak pochodne funkcji $-\cos t$, której szereg Taylora względem każdego punktu prostej rzeczywistej (w szczególności więc również względem punktu $\pi/3$) ma – jak wiadomo np. z wykładu – nieskończony promień zbieżności. Stąd szereg Taylora funkcji ψ względem punktu $\pi/3$ ma nieskończony promień zbieżności.[5] Co więcej funkcja $t \mapsto -\cos t$ jest na całej prostej rzeczywistej równa swojemu szeregowi Taylora względem punktu $\pi/3$, podobnie jak funkcja $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$. Suma szeregu Taylora funkcji ψ względem punktu $\pi/3$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ wyraża się zatem wzorem $\frac{\pi}{2} - t - \cos t$.

Wykazaliśmy już wcześniej, że funkcja ψ jest ciągła na $\mathbb{R}$, więc

$$\psi(0) = \lim_{t \to 0^+} \psi(t) = \lim_{t \to 0^+} \Big(\frac{\pi}{2} - t - \cos t\Big) = \frac{\pi}{2} - 1$$

oraz

$$\psi(\pi) = \lim_{t \to \pi^-} \psi(t) = \lim_{t \to \pi^-} \Big(\frac{\pi}{2} - t - \cos t\Big) = -\frac{\pi}{2} + 1,$$

co dowodzi, że dla wszystkich $t \in [0, \pi]$ spełniona jest równość

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2} - t - \cos t.$$

Niech $2\pi\mathbb{Z} = \{2m\pi; m \in \mathbb{Z}\}$ i niech $\operatorname{dist}(t, 2\pi\mathbb{Z}) = \inf_{s \in 2\pi\mathbb{Z}} |t - s|$. Z parzystości oraz 2π-okresowości kosinusa i z definicji funkcji ψ wynikają łatwo parzystość oraz 2π-okresowość ψ na $\mathbb{R}$, zatem dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\psi(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{dist}(t, 2\pi\mathbb{Z}) - \cos t.$$

Funkcja ψ równa jest więc sumie swojego szeregu Taylora względem punktu $\pi/3$ na zbiorze $\{t \in \mathbb{R} : \operatorname{dist}(t, 2\pi\mathbb{Z}) = t\} = [0, \pi]$.

Alternatywne wyprowadzenie: Wzór $\psi(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{dist}(t, 2\pi\mathbb{Z}) - \cos t$ można było udowodnić również w nieco inny sposób. Wystarczyło bowiem przypomnieć sobie rozwinięcie funkcji *arcus sinus* w szereg potęgowy na przedziale $[-1, 1]$, by dostrzec, że $\psi(t) + \cos t = \arcsin(\cos t)$. Dla $t \in [0, \pi]$ spełniona jest tożsamość $\arcsin(\cos t) = \frac{\pi}{2} - t$, a dalej można już skorzystać z parzystości i 2π-okresowości kosinusa, jak w poprzednim rozumowaniu.

Bonus: Skoro $\psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$, a szereg funkcyjny po prawej stronie tej równości jest jednostajnie zbieżny, to

$$\frac{\pi^2}{8} - 1 = \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{\pi}{2} - t - \cos t\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proszę pomyśleć, jak w prosty sposób, obliczając wartości całek $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$ podobnie jak w dowodzie wzoru Wallisa, wyprowadzić stąd tożsamość bazylejską Eulera.

[5] Ze wzoru Cauchy'ego-Hadamarda wynika, że jeśli $f^{(k)}(t_0) = g^{(k)}(t_0)$ dla wszystkich całkowitych liczb $k \geq 2$, to szeregi Taylora funkcji f i funkcji g względem punktu t_0 mają taki sam promień zbieżności.