Zadanie 2 Rozwiązanie wzorcowe

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ ciągła ; $f(0)=1$; f różniczkowalna na $(0,1)$.

Teza: $\exists_{x_0}$ t. że $f'(x_0) < f(x_0)^2$.

Rozwiązanie (sp 1). Zał. przeciwnie, wtedy

$$\forall_x \; f'(x) \geq f(x)^2 \implies f'(x) \geq 0 \implies \boxed{f(x) \geq f(0) = 1} \quad f \text{ dodatnie}$$

$$\iff \frac{f'(x)}{f(x)^2} = \left(-\frac{1}{f(x)}\right)' \geq 1 = x'$$

Stąd funkcja $-x-\frac{1}{f(x)}$ jest niemalejąca

$$\implies \forall_{x\in[0,1]} \; -x-\frac{1}{f(x)} \geq 0-\frac{1}{f(0)} = -1$$

$$\iff \frac{1}{f(x)} \leq 1-x$$

$$\iff f(x) \geq \frac{1}{1-x}$$

gdy $x \to 1_-$ $f(x) \to \infty$.

Sprzeczność z ciągłością f w 1 □

sp2 (Jakub Filip; Łukasz [illegible]; Krzysztof Szostek)

Zał. przeciwnie: $\forall_x \; f'(x) \geq f(x)^2$

$\implies$ 1) $f'(x) \geq 0 \implies f(x) \geq f(0) = 1$

2) $f'(x) \geq f(x)^2 \geq 1$

$\implies f(x) \geq 1+x$

3) $f'(x) \geq \cancel{1+x}\; f(x)^2 \geq (1+x)^2$

$\geq 1+2x = (1+x+x^2)'$

$\implies f(x) \geq 1+x+x^2$

Indukcyjnie $f(x) \geq \underbrace{1+x+x^2+\dots+x^n}_{\frac{1}{1-x}}$ $\forall_n$

$\implies f(x) \xrightarrow[x\to 1_-]{} +\infty$ ↯. □