Zadanie 3 Rozwiązanie wzorcowe.

Sp1. $\forall_{n=0,1,2,\dots} \int_{-1}^{1} x^{2n} \varphi(x)\,dx = 0$

$\varphi: [-1,1] \to \mathbb{R}$ ciągła

Teza φ – funkcja nieparzysta $\left(\varphi(-x) = -\varphi(-x)\right)$.

Sp1. (Bogdan Błędziński)

$$\int_{-1}^{1} x^{2n} \varphi(x)\,dx = \left\{\begin{matrix} y=-x \\ dy=-dx \end{matrix}\right\} = \int_{1}^{-1} \cancel{x} y^{2n} \varphi(-y)\,dy =$$

$$= -\int_{-1}^{1} y^{2n}\varphi(-y)\,dy = -\int_{-1}^{1} x^{2n}\varphi(-x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} x^{2n}\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)dx = 0$$

Z drugiej strony $\displaystyle\underbrace{\int_{-1}^{1} \underbrace{x^{2n+1}}_{\text{nieparzyste}} \underbrace{\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)}_{\text{parzysta}}}_{\text{nieparzyste}} dx = 0$

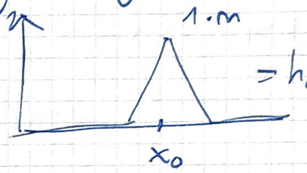
$\int_{-1}^{1}$ f. nieparzystej $= 0$.

Sp2. Obie $\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \int_{-1}^{1} x^{n} \underbrace{\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)}_{\text{ciągła}} dx = 0$

$\Rightarrow \varphi(x)+\varphi(-x) \equiv 0$

dowodzone na ćwiczeniach $\square$

Sp2 (Kamil Zwierzchowski, Szymon Szmigielski)

Rozważmy $\cancel{h_n(x_0)} =$  $= h_{n,x_0}$

niech $W_n(x) \rightrightarrows \cancel{h_n(x_0)}\ h_{n,x_0}$

aproksymacja jednostajna wielomianami

$\cancel{h_n(x)} \Rightarrow \underbrace{W_n(-x)+W_n(x)}_{\text{wielomian parzystego stopnia} = Q_n(x)} \rightrightarrows \cancel{h_n(x_0)}\ h_{n,x_0}+h_{n,-x_0}$

teraz $0 = \int_{-1}^{1} Q_n(x)\,\varphi(x)\,dx \longrightarrow \int_{-1}^{1}\left(h_{n,x_0}+h_{n,-x_0}\right)\varphi(x)\,dx$

jest $= \int_{0}^{1} h_{n,x_0}\left(\varphi(x)+\varphi(-x)\right)dx$

jeśli $\varphi(x_0)+\varphi(-x_0)\neq 0$ dla pewnego $x_0\in(0,1)$

to $\exists_m$ takie, że $|\varphi(x)+\varphi(-x)| > \varepsilon_0$

z ciągłości φ w otoczeniu $x\in(x_0-\frac{1}{2m}, x_0+\frac{1}{2m})$

stąd $\left|\int_0^1 h_{m,x_0}(\varphi(x)+\varphi(-x))dx\right| =$

$= \int_0^1 h_{m,x_0}|\varphi(x)+\varphi(-x)|dx > \varepsilon_0\cdot\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ sprzeczność z warunkiem $\int_0^1 h_{m,x_0}(\varphi(x)+\varphi(-x))dx \to 0.$

□

zp3. (Szymon Maziński)

niech $W_m(x)\rightrightarrows\varphi(x)$ jednostajna zbieżność wielomianów

$\Rightarrow W_m(x)+W_m(-x)\rightrightarrows\varphi(x)+\varphi(-x).$

$\Rightarrow (W_m(x)+W_m(-x))(\varphi(x)+\varphi(-x))\rightrightarrows(\varphi(x)+\varphi(-x))^2$

zatem $\int_{-1}^1 (W_m(x)+W_m(-x))(\varphi(x)+\varphi(-x))dx \rightrightarrows \int_{-1}^1 (\varphi(x)+\varphi(-x))^2dx$

ale $\underbrace{W_m(x)+W_m(-x)}_{\text{wielomian parzysty}}$ $\Rightarrow$

$\int_{-1}^1 (W_m(x)+W_m(-x))\varphi(x)dx=0$

i analogicznie $x=-y$ $\int_{-1}^1 (W_m(x)+W_m(-x))\varphi(-x)dx=0$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 (W_m(x)+W_m(-x))(\varphi(x)+\varphi(-x))dx = 0$

$\int_{-1}^1 (\varphi(x)+\varphi(-x))^2dx \geq 0$ ciągła dodatnia

$\Leftrightarrow (\varphi(x)+\varphi(-x))^2\equiv 0.$

□

spl (Funkcja: Cauchy Bolta)

Michał Jóźwikowski

$$0 = \int_{-1}^{1} \varphi(x)\, x^{2m}\, dx = \int_{0}^{1} \varphi(x)\, x^{2m}\, dx + \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, x^{2m}\, dx =$$

$$= \int_{0}^{1} \underbrace{\left(\varphi(x) + \varphi(-x)\right)}_{h(x)} x^{2m}\, dx$$

Pokażmy, że jeśli $\forall_{m}$ $\int_0^1 h(x)\, x^{2m}\, dx = 0$ (h ciągła)

to $h(x) \equiv 0$.

Rozważmy $f(x) = h(\sqrt{x})$ – ciągła

$\exists$ $w_m(x) \rightrightarrows f(x) = h(\sqrt{x})$ ciąg wielomianów

$\Rightarrow$ $w_m(x^2) \rightrightarrows h(x)$

↳ wielomiany parzyste

teraz $\int_0^1 w_m(x^2)\, h(x)\, dx = 0$ bo $\int x^{2m} h(x)\, dx = 0$ $\forall_{M}$

$$\downarrow$$

$$\int_0^1 h(x)^2\, dx \Rightarrow \boxed{h(x) \equiv 0} \quad \square$$